

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
05.04.2014.

VIII разред

1. Докажи да је за сваки природан број n вредност израза $\frac{n^2}{2} - \frac{2n}{3} + \frac{n^3}{6}$ цео број.

2. Које године двадесетог века је рођен човек који ове године пуни онолико година колики је производ цифара године његовог рођења?

3. У правилну четворострану пирамиду уписана је коцка. Једна основа коцке је у равни основе пирамиде, а темена друге основе су у тежиштима бочних страна пирамиде. Колико пута је запремина пирамиде већа од запремине ове коцке?

4. Нека је ABC једнакостранични троугао, L тачка на страници AB , K тачка на страници BC и M пресек дужи AK и CL . Докажи: Ако се око четвороугла $BKML$ може описати кружница, онда је његова површина једнака површини троугла SAM .

5. У круг су уписани квадрат и правилни петоугао тако да им се темена не поклапају. Докажи да међу 9 лукова на које та темена деле кружницу постоји бар један којем одговара централни угао не већи од 9° .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Решење

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу.

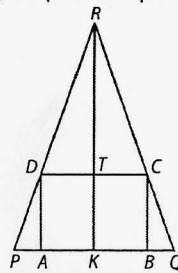
1. $\frac{n^2}{2} - \frac{2n}{3} + \frac{n^3}{6} = \frac{n^3 + 3n^2 - 4n}{6} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n - 6n}{6} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} - n$ (10 бодова). Даље је $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n+1)(n+2)$. Како је међу три узастопна природна броја увек један дељив са 3 и барем један дељив са 2, добијени производ је сигурно дељив са 6 па је $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$ природан број, а онда је и $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} - n$ цео број (10 бодова).

2. (МЛ 48/3) Година рођења је облика $19xy$. По претпоставци задатка је $1900 + 10x + y + 1 \cdot 9 \cdot x \cdot y = 2014$, одакле је $10x + y + 9 \cdot x \cdot y = 114$ (5 бодова). Лако се види да је $x > 1, y > 1$ (случајеви $x = 1$ и $y = 1$ се лако елиминишу) и $x \cdot y < 12$ (јер је $9 \cdot 12 + 10 > 114$). Следи $x < 6, y < 6$ (5 бодова). Преостају следеће могућности за xy : 22, 23, 24, 25, 32, 33, 42, 52.

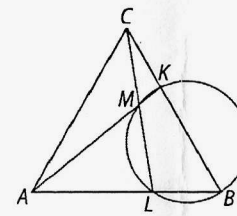
Провером налазимо да само за $xy = 33$ и $xy = 42$ важи $1933 + 1 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 3 = 2014$ и $1942 + 1 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 2 = 2014$. Човек је рођен 1933. (5 бодова) или 1942. године (5 бодова).

3. Ако пресечемо пирамиду равни која садржи њену висину и паралелна је једној основној ивици, добијамо пресек са слике. Ако основну ивицу пирамиде означимо са b , висину са H , а ивицу коцке са a , тада је $PQ = b, BC = a, DC = a\sqrt{2}, RK = H$ (5 бодова). Како су темена једне основе коцке у тежиштима бочних страна пирамиде, важи да су троуглови RTC и RKQ слични и $RC : CQ = 2 : 1$, па је $RT : TK = 2 : 1, RT = 2a, H = RK = 3a$ (5 бодова). Такође, како је $RC : RQ = 2 :$

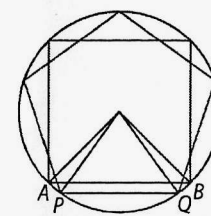
3, то је $TC : KQ = 2 : 3$, одакле је $b = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ (5 бодова). Сада је запремина пирамиде $V = \frac{9}{2}a^3$, па је запремина пирамиде 4,5 пута већа од запремине коцке (5 бодова).



слика уз задатак 3



слика уз задатак 4



слика уз задатак 5

4. Ако је четвороугао $BKML$ тетиван, збир наспрамних углова је 180° , па је $\sphericalangle MLB = 180^\circ - \sphericalangle MKB = \sphericalangle MKC$ (5 бодова). У троугловима AKC и CLB једнака су по два унутрашња угла ($\sphericalangle CLB = \sphericalangle AKC, \sphericalangle CBL = \sphericalangle ACK = 60^\circ$) и преостали трећи углови су им једнаки. У овим троугловима једнаке су по једна страница и два налегла угла, па су подударни и имају једнаке површине (10 бодова). Сада је $P_{SAM} = P_{BAC} - P_{BKM} = P_{ACB} - P_{BKM} = P_{BKM}$ (5 бодова).

5. Кружном луку изнад једне странице квадрата одговара централни угао од 90° , а изнад једне стране правилног петоугла угао од 72° . На једном кружном луку изнад странице квадрата, на пример AB , морају се наћи два темена правилног петоугла, на пример P и Q (види слику). Збир централних углова којима одговарају лукови AP и BQ је $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Посматрајмо мањи од ових лукова. Мањем луком одговара мањи централни угао, а како је њихов збир 18° , централни угао над мањим луком биће мањи од 9° . Ако су лукови једнаки, једнаки су и централни углови, по 9° , па у оба случаја важи тврђење задатка (20 бодова).